المتباينات

Inequalities المحاضرة الثانية

أ.أماني الشطشاط

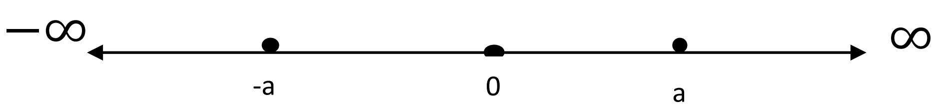
تمهيد

للمتباينات دور كبيرفي الرياضيات حيث تعد فرعاً من فروع علم الجبر. والمتباينات أنواع كثيرة لأنها يعتمد عليها في إثبات العديد من النظريات المهمة.لهذا سيبين هذا الفصل كل مايتعلق بها.

2.1 الأعدادالحقيقية Real Numbers

الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ تمثل بنقاط على خط مستقيم ، كل نقطة يقابلها عدد واحد فقط ، النقطة a تسمى إحداثي والعدد صفر يسمى نقطة الأصل . الإتجاه الموجب إلى اليمين من نقطة الأصل و الإتجاه السالب إلى يسارها. كما هو موضح (بالشكل 1-2)

حيث $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$



شكل2-1

الخواص الترتيبية للأعداد الحقيقية

لتكن a, b عددين حقيقيين فإذا

- وقعت a على يسار b نقول أن a أصغر من b وتكتب $a < b$
- وقعت a على يمين b نقول أن a أكبر من b وتكتب $a > b$

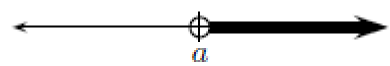
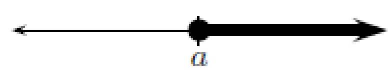
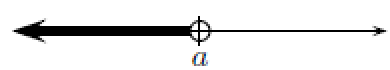
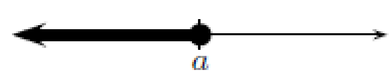
2.2 الفترات (Intervals)

الفترة هي فئة جزئية من فئة الأعداد الحقيقية وتحتوى على عدد لانهائي من العناصر ومن أنواعها:

- **الفترات المحدودة المنتهية**

التمثيل على خط الأعداد	التمثيل بالفئات	النوع	الفترة
	$\{x: a < x < \mathrm{b}\}$	مفتوحة	(a, b)
	$\{x: a \leq x \leq \mathrm{b}\}$	مغلقة	$[a, b]$
	$\{x: a < x \leq \mathrm{b}\}$	نصف مفتوحة أو نصف مغلقة	$(a, b]$
	$\{x: a \leq x < b\}$	نصف مفتوحة أو نصف مغلقة	$[a, b)$

- **الفترات الغير المنتهية**

التمثيل على خط الأعداد	التمثيل بالفئات	النوع	الفترة
	$\{x: x > a\}$	مفتوحة	(a, ∞)
	$\{x: x \geq a\}$	مغلقة	$[a, \infty)$
	$\{x : x < a\}$	مفتوحة	$(-\infty, a)$
	$\{x : x \leq a\}$	مغلقة	$(-\infty, a]$

ملاحظة

تطبق جميع عمليات الفئات على الفترات

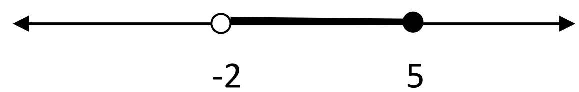
مثال

إذا كانت $B = [0,5]$, $A = (-2, 3]$, $U = \mathbb{R}$,

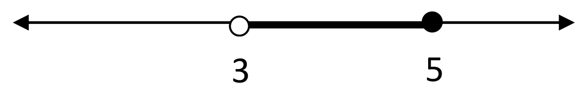
أوجد مع التوضيح بالرسم A' , $B - A$, $A \cup B$, $A \cap B$,

- $A \cap B = [0,3]$

- $A \cup B = (-2,5]$



- $B - A = (3, 5]$



- $A' = (-\infty, -2] \cup (3, \infty)$

مثال: إذا كانت $U = \mathbb{R}$ أوجد:

1. $\{x: 0 < x < 5\} \cup \{x: 1 < x < 7\}$
2. $\{x: x < 1\} \cap \{x: x \geq 0\}$
3. $\{x: x < 0\} \cap \{x: x > 0\}$

الحل

1. $(0,5) \cup (1,7) = (0,7)$
2. $(-\infty, 1) \cap [0, \infty) = [0,1)$
3. $(-\infty, 0) \cap (0, \infty) = \emptyset$

2.3 المتباينة Inequality

هي جملة رياضية مفتوحة تأخذ إحدى الصور التالية

- $a < b$
- $a \leq b$
- $a > b$
- $a \geq b$

حيث a و b كميات عددية حقيقية. وتسمى $(<, \leq, >, \geq)$ بإشارات المتباينات

2.3.1 خواص المتباينات

إذا كانت a , b , c أعداد حقيقية فإن:

- $a \leq a$
- $a < b \quad \rightarrow \quad a + c < b + c$
- $a < b \quad \rightarrow \quad a - c < b - c$
- $a < b, \quad c > 0 \quad \rightarrow \quad ac < bc$
- $a < b, \quad c < 0 \quad \rightarrow \quad ac > bc$
- $a \leq b \;\; and \;\; b \leq a \; \rightarrow a = b$
- $a < b \rightarrow \; \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a}} > \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{b}}$ إذا كان a, b عددان موجبان أو سالبان
- $a < \mathrm{b} \quad , \quad a, \mathrm{b} > 0 \quad \rightarrow \quad a^2 < b^2$
- $a < \mathrm{b} \quad , \quad a, \mathrm{b} < 0 \rightarrow \quad a^2 > b^2$

2.3.2 أنواع المتباينات

- متباينات من الدرجة الأولى "خطية" وهي على احدى الصور التالية:

$$a_1x \pm \mathrm{b} < a_2x + \mathrm{d} \qquad\qquad a_1x \pm \mathrm{b} < c$$

$$a_1x + b < a_2x \pm \mathrm{c} < a_3x \pm \mathrm{d} \qquad\qquad \mathrm{d} < a_1x \pm \mathrm{b} < c$$

حيث $a_1, a_2, a_3, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d} \in \mathbb{R}$

- متباينات من الدرجة الثانية" تربيعية " التي إحدى صورها $ax^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c} \leq 0$

- المتباينات المحتوية على القيم المطلقة التي احد صورها $|x| \leq 0$

2.4 حل المتباينة

حل المتباينة هي القيمة أو مجموعة القيم التي تجعل المتباينة صحيحة (إيجاد قيم x التي تحقق المتباينة).

حل المتباينة الخطية (من الدرجة الأولى)

طريقة الحل:

1) نضع الحدود التي تحتوي على x في طرف والأعداد في الطرف الأخر.
2) نجري العمليات الحسابية للحصول على مجموعة الحل (قيم x) وتمثيلها في فترة.

ملاحظة

عند ضرب المتباينة أو قسمتها على عدد سالب فإن علامة التباين تتغير من أكبر من إلى أصغر من والعكس صحيح.

أمثلة:

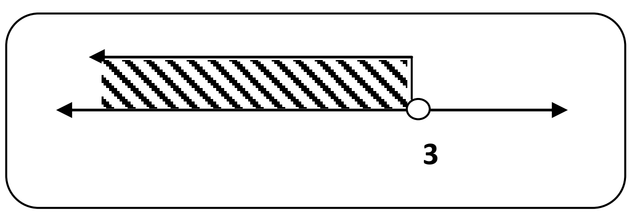
أوجد مجموعة الحل للمتباينات الآتية:-

.1 $2x < 6$

$$\frac{1}{2}(2x) < \frac{1}{2}(6)$$

$$x < 3$$

$$x \in (-\infty, 3)$$



شكل2-2

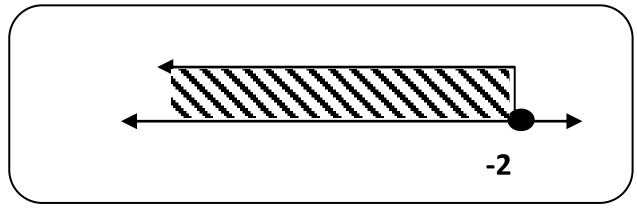
.2 $-4x + 12 \geq 20$

$-4x \geq 20 - 12$

$\frac{-4x}{-4} \geq \frac{8}{-4}$

$x \leq -2$

$x \in (-\infty, -2]$



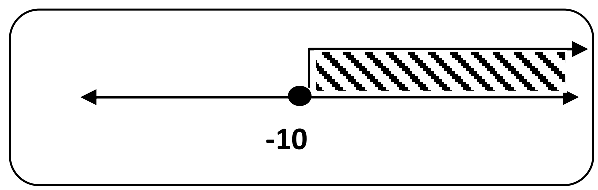
.3

$3 + \frac{x}{5} \geq 1$

$\frac{x}{5} \geq -2$

$x \geq -10$

$x \in [-10, \infty)$



شكل2-4

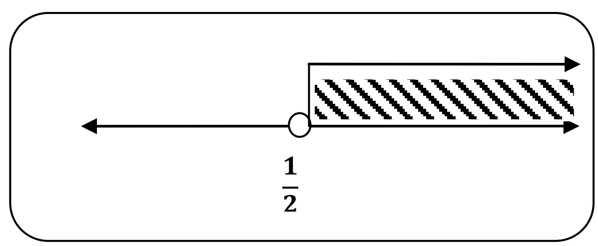
.4 $5x + 1 > 2 + 3x$

$5x - 3x > 2 - 1$

$2x > 1$

$x > \frac{1}{2}$

$x \in (\frac{1}{2}, \infty)$



شكل2-5

2.4.1 حل متباينة من الدرجة الأولى تحتوي على علامتين تباين

أمثلة:

أوجد حل المتباينة الاتية مع التمثيل بالرسم

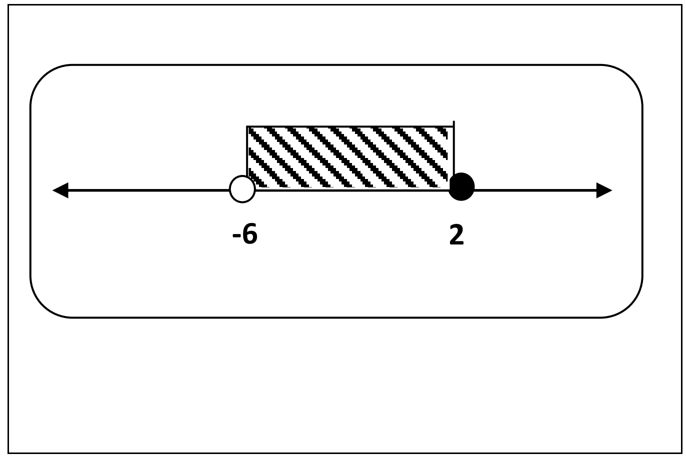
.1 $-9 < 2x + 3 \leq 7$

$-9 - 3 < 2x \leq 7 - 3$

$-12 < 2x \leq 4$

$-6 < x \leq 2$

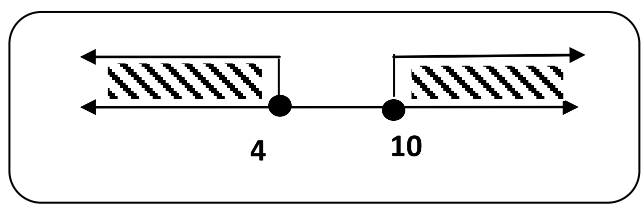
$\therefore x \in (-6,2]$



.2 $6 \leq x - 4 \leq 0$

$10 \leq x \leq 4$

$\therefore x = \emptyset$



شكل2-11